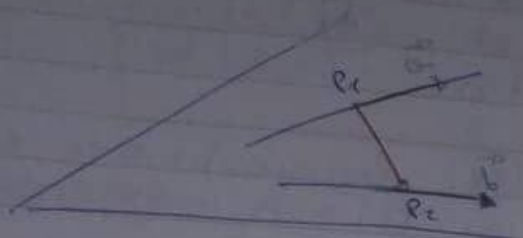


Απόδειξη: Εάν $(\vec{e}_1), (\vec{e}_2)$ ορθογώνια $\Rightarrow \vec{P}_1 \vec{P}_2$
είναι στο ίδιο επίπεδο



$$\Rightarrow \angle \vec{P}_1 \vec{P}_2, \vec{e}_1 \vec{e}_2 = 0$$

28/3/18

Σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$

Ορισμός Σφαίρα κέντρου K και ακτίνας R
είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων
του χώρου που ικανοποιούν από το K .



Εάν $\vec{x}_K = (a, b, t)$ είναι το
διάνυσμα θέσης του K , τότε
Διανοματική εξίσωση

$$\| \vec{x} - \vec{x}_K \| = R \quad (1)$$

κανονική εξίσωση

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-t)^2 = R^2 \quad (2)$$

Αν αναπτύξουμε την (2) $\Rightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2tz + a^2 + b^2 + t^2 - R^2 = 0$$

A B Γ Δ

Μπορούμε να γράψουμε τη εξίσωση της
σφαίρας $\Rightarrow$ και ως

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

Η (3) ονομάζεται αναλυτική εξίσωση

Ας δούμε πώς και το αντίστροφο.
Πυθαγόρεια η περιγράφει η (3) για τινες
 A, B, C, D

Πρόταση: Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \text{ Τότε:}$$

- (i) Εάν $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$, η εξίσωση δεν έχει λύση.
- (ii) Εάν $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$, η λύση είναι αφής.
- (iii) Εάν $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$, η λύση είναι σφαίρα
με κέντρο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ και

$$\text{ακτίνα } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}}{2}$$

Απόδειξη:

Γράφουμε την εξίσωση και ως εξής:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + Ax + y^2 + By + z^2 + Cz + D = \\ &= x^2 + 2\frac{A}{2}x + y^2 + 2\frac{B}{2}y + z^2 + 2\frac{C}{2}z + D = \\ &= \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} - \frac{C^2}{4} + D \end{aligned}$$

⇨ Ισοδύναμα:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}$$

Τα αριστερά (i), (ii), (iii) είναι αληθή

Παρατήρηση Πολλές φορές η εξίσωση της σφαίρας γράφεται και στην μορφή $E(x^2+y^2+z^2) + Ax + By + Cz + D = 0$. Για $E=0$ και $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ έχουμε επίπεδο, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως σφαίρα με κέντρο το ∞ .

Θεώρημα Δίνονται 4 σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ και $P_4(x_4, y_4, z_4)$ στο $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι μη-συμπίναδα. Τότε υπάρχει μια και μόνο σφαίρα η οποία διέρχεται από τα P_1, P_2, P_3, P_4 . Επιπλέον η σφαίρα έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

LDE

Απόδειξη Αν αναλύσουμε την ορίζουσα θα προκύψει μια εξίσωση της μορφής:

$$E(x^2+y^2+z^2) + Ax + By + Cz + D = 0$$

Έχουμε ότι :

$$E = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_4}{\Gamma_1 - \Gamma_4}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 & 0 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 & 0 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \langle \vec{P_1 P_4}, \vec{P_2 P_4} \times \vec{P_3 P_4} \rangle \neq 0$$

Άρα: $E \neq 0$, επομένως η εξίσωση μας παριστάνει σφαίρα.

Παρατηρώντας πως βγαίνομε συν πράξη χωρίς να υπολογίσουμε ορίσματα, εξίσωση σφαίρας που διέρχεται από 4-σφαίρες $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$.

Η σφαίρα θα έχει εξίσωση της μορφής:
 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Άρα να βρούμε τα A, B, C, D . Επειδή P_1, P_2, P_3, P_4 είναι σφαίρες της σφαίρας $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 = -D - x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 = -D - x_4^2 - y_4^2 - z_4^2 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί (αν υπάρχει)
σφαίρα που διέρχεται από τα σημεία
 $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$ και $(1,0,1)$
Λύση

Από τα σημεία P_1, P_2, P_3 διέρχεται το
επίπεδο $x + y + z = 1$

Το P_4 δεν ανήκει στο επίπεδο των
 P_1, P_2, P_3 διότι δεν ικανοποιεί την εξίσωση.

Η σφαίρα που ζητάμε έχει εξίσωση
 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Άρα:

$$(E) \begin{cases} 1 + A + D = 0 \\ 1 + B + D = 0 \\ 1 + C + D = 0 \\ 2 + A + C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 - D \\ B = -1 - D \\ C = -1 - D \\ 2 + (-1 - D) + (-1 - D) + D = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 0 \end{cases}$$

• Σχέσιμες θέσεις σφαίρας - επιπέδου

Δίνεται σφαίρα (Σ) με κέντρο το $K(a, b, c)$ και ακτίνα R , δηλαδή $(\Sigma): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ και το επίπεδο:

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

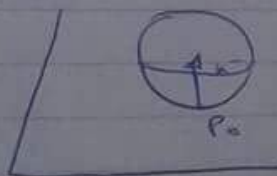
Η απόσταση του κέντρου K από το επίπεδο

$$\Pi: d(K, \Pi) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• Εάν $d(K, \Pi) > R$, η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία.



• Εάν $d(K, \Pi) = R$, τότε η τομή ~~$\Sigma \cap \Pi$~~ $\Sigma \cap \Pi = \{ \text{σημείο } P_0 \}$. Σε αυτή την περίπτωση το Π εφαπτεται της Σ και το ονομάζουμε εφαπτόμενο επίπεδο της P_0 .



Επίσης το $\vec{KP}_0$ είναι κάθετο στο Π .

• Εάν $d(k, \Pi) < R$, τότε η τμή είναι μια καμπύλη. Θα δείξουμε ότι η καμπύλη αυτή είναι κύκλος στο Π . Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο $P \in \Sigma \cap \Pi$. Ας σφαιροποιήσουμε με M την ορθή προβολή του k στο Π . Τότε το τρίγωνο kMP είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\begin{aligned} [d(P, M)]^2 &= [d(P, k)]^2 - [d(k, M)]^2 = \\ &= R^2 - [d(k, M)]^2 \Rightarrow d(P, M) = \sqrt{R^2 - [d(k, M)]^2} \end{aligned}$$

δεν εξαρτάται από το P

Άρα: απόσταση του P από το M είναι σταθερή. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση $\boxed{\Sigma \cap \Pi = \text{κύκλος}}$



• Εξίσωση εγγεγραμμένων επιπέδων της σφαίρας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σφαίρα (Σ) με εξίσωση: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\delta)^2 = R^2$.
Θέλουμε να βρούμε το εγγεγραμμένο επίπεδο στο $P_0 \in \Sigma$.



Το διάνυσμα $\vec{kP_0}$ είναι κάθετο στο επίπεδο Π που ζητάμε. Επειδή $P_0 \in \Pi$ η εξίσωση του Π θα είναι:

$$\begin{aligned} 0 &= (x-x_0)(x_0-a) + (y-y_0)(y_0-b) + (z-z_0)(z_0-\delta) = \\ &= \underbrace{(x-a+a-x_0)}_{(x-a)}(x_0-a) + \underbrace{(y-b+b-y_0)}_{(y-b)}(y_0-b) + \underbrace{(z-\delta+\delta-z_0)}_{(z-\delta)}(z_0-\delta) = \\ &= (x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-\delta)(z_0-\delta) - \\ &\quad - (x_0-a)^2 - (y_0-b)^2 - (z_0-\delta)^2 \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ας υποθέσουμε ότι η σφαίρα μας δίνεται από την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Τότε βρούμε ισοδύναμα την εξίσωση ως:

$$\text{ως: } \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = R^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D$$



Από παραβάνους:

$$(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-\delta)(z_0-\delta) = R^2$$

Έχουμε αποδείξει το εξής

Πείραγμα: Εάν Σ είναι σφαίρα με εξίσωση:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\delta)^2 = R^2 \text{ τότε το}$$

εγγεγραμμένο επίπεδο στο $P_0(x_0, y_0, z_0)$

έχει εξίσωση: $(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-\delta)(z_0-\delta) = R^2$



Επομένως το εγγεγραμμένο επίπεδο στο $P_0 \in \Sigma$ είναι:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right) \cdot \left(x_0 + \frac{A}{2}\right) + \left(y + \frac{B}{2}\right) \cdot \left(y_0 + \frac{B}{2}\right) + \left(z + \frac{\Gamma}{2}\right) \cdot \left(z_0 + \frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}{4}$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + \frac{A}{2}(x+x_0) + \frac{B}{2}(y+y_0) + \frac{\Gamma}{2}(z+z_0) + \Delta = 0$$

Παράδειγμα: Δίνεται η σφαίρα

$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 6z = 0$. Να βρεθεί το εγγεγραμμένο επίπεδο στο $O(0,0,0) \in \Sigma$

Λύση



$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 4x + y^2 + 8y + z^2 - 6z \Rightarrow 4 + 16 + 9 = (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 \\ &\Rightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 29 \end{aligned}$$

Το κέντρο είναι το σημείο $K(-2, -4, 3)$. Το διάνυσμα $\vec{OK} = (-2, -4, 3)$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ζητάμε. Άρα:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{OK}, \vec{OX} \rangle = \langle (-2, -4, 3), (x, y, z) \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{-2x - 4y + 3z = 0} \quad (\pi) \end{aligned}$$

Πρόβλημα: Δίνεται σφαίρα
 $(\Sigma): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-d)^2 = R^2$ και
 σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ εκτός σφαίρας. Από το
 P_0 υπάρχουν άπειρα επίπεδα προς την
 σφαίρα. Τι σχήμα έχουν τα σημεία επαφής;
 Θα αποδειχθεί ότι το σχήμα είναι κύκλος.



Ας υποθέσουμε ότι $P_1(x_1, y_1, z_1)$ το σημείο
 επαφής του επιπέδου Π που διέρχεται
 από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Η εξίσωση του Π
 θα είναι:

$$(x-a) \cdot (x_1-a) + (y-b) \cdot (y_1-b) + (z-d) \cdot (z_1-d) = R^2$$

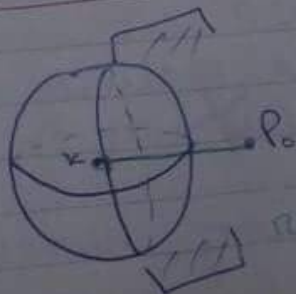
Όπως το Π διέρχεται και από το P_0
 συνεπώς,

$$(x_0-a) \cdot (x_1-a) + (y_0-b) \cdot (y_1-b) + (z_0-d) \cdot (z_1-d) = R^2$$

Αρα αυτή είναι η εξίσωση των εφαιρικών
 επιπέδων που διέρχεται από τα P_0, P_1 .

Επομένως, το P_1 βρίσκεται στο επίπεδο με
 εξίσωση:

$$(x_0-a) \cdot (x-a) + (y_0-b) \cdot (y-b) + (z_0-d) \cdot (z-d) = R^2 \quad (*)$$



Επομένως όλα τα σημεία
 τομής της Σ με το επίπεδο
 περιγράφουν κύκλο.

πολύ επιπλέον

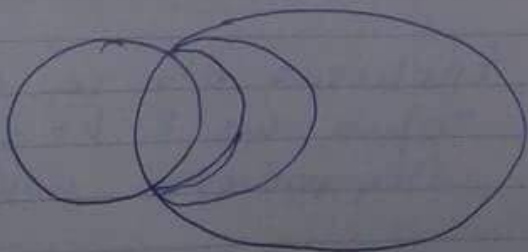
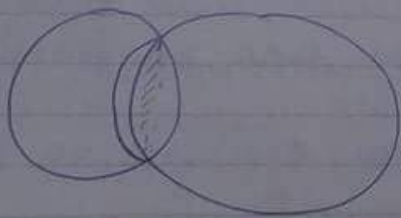
Ορισμός: Δίνεται σφαίρα Σ με εξίσωση $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-d)^2 = R^2$ και σημείο P_0 εντός της Σ . Το επίπεδο $(x_0-a) \cdot (x-a) + (y_0-b) \cdot (y-b) + (z_0-d) \cdot (z-d) = R^2$ λέγεται πολυστο επίπεδο του P_0 ως προς της Σ .

Δύο σφαίρες

Θεωρούμε δύο σφαίρες Σ_1, Σ_2 με εξίσωση

$$\begin{cases} \Sigma_1: S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Sigma_2: S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι Σ_1 και Σ_2 τέμνονται και δεν εφάπτονται. Θέλουμε να βρούμε όλες τις σφαίρες που διέρχονται από των τομή τους



Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε την εξίσωση:
 $0 = \lambda \cdot S_1(x, y, z) + \mu \cdot S_2(x, y, z)$ που ισοδυναμεί
 διατάσσεται ως εξής:

$$(\lambda + \mu)(x^2 + y^2 + z^2) + (\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0$$

Εάν $\lambda \neq -\mu$, τότε η τελευταία εξίσωση παριστάνει σφαίρα και το κοινό σημείο της S_1, S_2 βρίσκεται στον άξονα της σφαίρας. Η ομοθεσία των παραπάνω σφαιρών λέγεται δεσμή σφαιρών.

Παράδειγμα Δίνονται οι σφαίρες

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 40 = 0$$

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

Θέλουμε να βρούμε μια σφαίρα η οποία διέρχεται από την τομή των S_1 και S_2 καθώς και από το σημείο $O(0, 0, 0)$.

Λύση

Η ζητούμενη σφαίρα ανήκει στη δεσμή σφαιρών που ορίζουν οι S_1 και S_2 . Οπότε θα έχει εξίσωση:

$$0 = \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 40) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 20)$$

Επειδή το $O(0, 0, 0)$ πρέπει να είναι σημείο της σφαίρας που ζητάμε θα πρέπει:

$$-\lambda \cdot 40 - \mu \cdot 20 = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = -2\lambda}$$

Εν συνεχεία, για $\mu = -2\lambda$, → D